هندسه ۳

فصل اول: ماتریس و کاربردها

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

➢ **تعریف ماتریس:** اگر mn عدد را در جدولی با m سطر و n ستون به صورت زیر قرار دهیم به طوری که آدرس هر عدد با شماره‌ی سطر و ستون آن مشخص شود، جدول تولید شده را یک ماتریس از <u>مرتبه‌ی</u> $m\times n$ می‌نامیم و با نماد $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ نمایش می‌دهیم. نماد a_{ij} یعنی <u>درایه‌ی</u> واقع در سطر iام و ستون jام که به آن <u>درایه عمومی</u> می‌گوییم به طوری که $۱\le i\le m$ و $۱\le j\le n$، مثلاً $a_{۳۲}$، درایه‌ی سطر سوم و ستون دوم است.

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}=[a_{ij}]_{m\times n}$$

➢ **چند تعریف دیگر:**

۱← اگر $m=n$ باشد، ماتریس را **ماتریس مربعی** از مرتبه‌ی n گوییم.

۲← در ماتریس <u>مربعی</u> $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$، درایه‌های $a_{۱۱}$، $a_{۲۲}$، $a_{۳۳}$ و... را درایه‌های **قطر اصلی** می‌نامیم، یعنی اگر $i=j$ باشد، در این صورت درایه a_{ij} روی قطر اصلی قرار دارد.

مثال: $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix}$

۳← اگر ماتریس به صورت $A=\left[a_{ij}\right]_{۱\times n}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \end{bmatrix}$ باشد، A را **ماتریس سطری** گوییم که فقط یک سطر دارد.

۴← اگر ماتریس به صورت $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times ۱}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} \\ a_{۲۱} \\ \vdots \\ a_{m۱} \end{bmatrix}$ باشد، A را **ماتریس ستونی** گوییم که فقط یک ستون دارد.

۵← اگر درایه‌های بالای قطر اصلی در یک ماتریس مربعی، صفر باشند، ماتریس را **پایین مثلثی** می‌نامیم.

مثال: $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۰ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}$

۶← اگر درایه‌های پایین قطر اصلی در یک ماتریس مربعی، صفر باشند، ماتریس را **بالا مثلثی** می‌نامیم.

مثال: $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۴ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۶ \end{bmatrix}$

۷← اگر به جز قطر اصلی، بقیه‌ی درایه‌های یک ماتریس مربعی، صفر باشد، ماتریس را **قطری** می‌نامیم. (درایه های واقع بر قطر اصلی می توانند صفر باشند یا نباشند)

مثال: $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$

۸← اگر تمام درایه‌های روی قطر اصلی یک ماتریس قطری با هم برابر باشند، ماتریس را **ماتریس اسکالر** می‌نامیم.

مثال: $\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$

۹← اگر تمام درایه‌های یک ماتریس، صفر باشد، ماتریس را **ماتریس صفر** می‌نامیم و با $\bar{O}$ نمایش می‌دهیم.

☑ مثال: **اگر ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} i+j & i\ge j \\ i-j & i<j \end{cases}$ تعریف شده باشد، ماتریس A را تشکیل دهید.**

ماتریس همانی (واحد): ماتریس همانی از مرتبه‌ی n که آن را با I_n نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_n=\begin{cases} ۰ & i\ne j \\ ۱ & i=j \end{cases} \xrightarrow{n=۳} I_۳=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

☑ مثال: **درایه‌های ماتریس $M=\left[۲i-j\right]_{۳\times۴}$ را به دست آورده و ماتریس را تشکیل دهید.**

☑ تست: **درایه‌های ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ از دستور $a_{ij}=\begin{cases} ۵ & i=j \\ ۰ & i<j \end{cases}$ محاسبه می‌شوند. کدام گزینه همواره صحیح است؟**

۱) A قطری است.

۲) A بالا مثلثی است.

۳) A پایین مثلثی است.

۴) $A=I_n$

☑ تست: ماتریس $A=[3i-5j]_{9\times9}$ مفروض است. مجموع درایه‌هایی که در آن‌ها $i=j$ است، چقدر است؟

۱) -60

۲) -90

۳) -120

۴) -150

➢ **تعریف:** دو ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{p\times q}$ **مساوی‌اند**، اگر اولاً $m=p$ و $n=q$ باشد (یعنی دو ماتریس هم‌مرتبه باشند) و ثانیاً به ازای هر i و j داشته باشیم: $a_{ij}=b_{ij}$. اگر چنین بود می‌نویسیم: $A=B$

$$\forall i,j: a_{ij}=b_{ij} \Leftrightarrow [a_{ij}]=[b_{ij}]$$

☑ **مثال: اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} mn & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & m+n \end{bmatrix}$ برابر باشند، حاصل m^3+n^3 را بیابید.**

❋ جمع ماتریس‌ها، ضرب عدد در ماتریس

اگر $A_{m\times n}$ و $B_{m\times n}$ دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، داریم:

$$A+B=[a_{ij}]_{m\times n}+[b_{ij}]_{m\times n}=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{m\times n}$$

$$rA=\left[ra_{ij}\right]_{m\times n} \xrightarrow{\text{نتیجه}} -A=\left[-a_{ij}\right]_{m\times n}$$

ویژگی‌ها:

۱) $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$ (عضو خنثای جمع)

۲) $A+B=B+A$ (جابجایی)

۳) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (شرکت‌پذیری)

۴) $A+(-A)=\bar{O}$

۵) $A+B=A+C \Leftrightarrow B=C$

۶) $r(A\pm B)=rA\pm rB$

۷) $(r\pm s)A=rA\pm sA$

۸) $(1)A=A\ ,\ (-1)A=-A$

۹) $(0)\times A=\bar{O}$

☑ **مثال: اگر $A=[i+2j]_{3\times3}$ و $B=[3i-j]_{3\times3}$ باشد، درایه‌ی سطر دوم و ستون سوم ماتریس $2A+3B$ را بیابید.**

☑ **مثال: از رابطه‌ی $3I=2A+\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$، ماتریس A را بیابید.**

☑ تست: کدام ماتریس را از ماتریس $M=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۱ \\ ۳ & ۳ & ۱ \\ ۵ & ۴ & ۴ \end{bmatrix}$ کم کنیم تا ماتریس حاصل، یک ماتریس همانی شود؟

۱) $[۲i-j]_{۳\times۳}$ ۲) $[i]_{۳\times۳}$

۳) $[۲j-i]_{۳\times۳}$ ۴) $[-i]_{۳\times۳}$

❋ ضرب ماتریس‌ها

تعریف اولیه: اگر A ماتریسی سطری و B ماتریسی ستونی باشد به طوری که تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای B برابر باشد، در این صورت $A\times B$ تعریف می‌شود و برای ضرب کافی است هر درایه A را در درایه نظیرش در B ضرب کرده و حاصل این ضرب‌ها را با هم جمع کنیم که در این صورت ماتریسی ۱×۱ یا عددی حقیقی حاصل می‌شود.

به عنوان مثال اگر $A=[۱ \quad ۲ \quad ۳ \quad ۴]$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۲ \\ -۲ \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت داریم:

$$A\times B=[۱ \quad ۲ \quad ۳ \quad ۴]\times\begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۲ \\ -۲ \end{bmatrix}=۱\times(-۱)+۲\times۰+۳\times۲+۴\times(-۲)=-۳$$

تعریف کلی: دو ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ مفروض‌اند به طوری که تعداد ستون های ماتریس A با تعداد سطرهای B برابر است. حاصل‌ضرب دو ماتریس A و B به صورت AB مقدور است (BA تعریف نمی‌شود) و به این صورت تعریف می‌شود که درایه‌ی ijام AB، از ضرب سطر iام A در ستون jام B به دست می‌آید. همچنین ماتریس حاصل از مرتبه‌ی $m\times p$ است.

$$C_{m\times p}=A_{m\times n}\times B_{n\times p}\to c_{ij}=\sum_{k=۱}^{n}a_{ik}\,b_{kj}$$

📖 **توجه:** شرط لازم برای تعریف حاصل‌ضرب AB این است که تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای B برابر باشد.

به عنوان مثال اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، داریم:

$$A_{۲\times۳}\times B_{۳\times۲}=C_{۲\times۲}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۸ \\ & \end{bmatrix}$$